

פיזיקה 2 חשמל ומגנטיות

פרק 7 - מציאת התפלגות מטען גאוס הדיפרנציאלי פואסון ולאפלס

תוכן העניינים

1. מציאת התפלגות מטען
2. משוואת פואסון ולאפלס
3.

מציאת התפלגות מטען:

שאלות:

- (1) **מציאת צפיפות נפחית משטחית קווית ונקודתית**
נתונה פונקציית הפוטנציאל הבאה במרחב (בקואורדינטות גליליות):

$$\varphi(r) = \begin{cases} Ar^2, & r < a \\ B \ln(r) + C, & a < r < b \\ D \ln(r), & b < r \end{cases}$$

A, B, C, D נתונים.

- א. מצא קשר בין הקבועים.
ב. מצא את התפלגות המטען במרחב, כעת נתון כי עוטפים את כל המערכת בגליל אינסופי מוליך מוארק ברדיוס $c > b$.
ג. מצא את פונקציית הפוטנציאל החדשה בכל המרחב.

- (2) **שדה התלוי בזווית**
השדה החשמלי במרחב נתון ע"י הפונקציה הבאה בקואורדינטות כדוריות:

$$\vec{E} = \frac{c}{r} (\hat{r} + \cos \theta \hat{\theta} + \sin \theta \cos \varphi \hat{\phi})$$

- א. מצא את צפיפות המטען במרחב.
ב. מצא את כמות המטען הנמצאת בתוך כדור ברדיוס R ע"י אינטגרל על צפיפות המטען.
ג. מצא שוב את כמות המטען הנמצאת בתוך כדור ברדיוס R ע"י חישוב של השטף של השדה החשמלי ושימוש בחוק גאוס.

- (3) **התפלגות בכדוריות**
השדה החשמלי במרחב נתון לפי הפונקציה הבאה:

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} -\frac{72\pi \cdot 10^5 (N \cdot \frac{m}{C})}{r} \hat{r}, & r < 1 \\ -\frac{144\pi \cdot 10^5 (N \cdot \frac{m^2}{C})}{r^2} \hat{r}, & r > 1 \end{cases}$$

- הקואורדינטות כדוריות.
מצאו את התפלגות המטען במרחב ותארו את המבנה שלה.

תשובות סופיות:

(1) ראה סרטון.

$$\vec{\nabla} \vec{E} = \frac{\epsilon_0 c}{r^2} \left(1 - \frac{\sin \theta}{\sin \varphi} + \frac{\sin \theta \cos 2\varphi}{\sin \varphi} \right) \quad \text{א.} \quad (2)$$

$$4\pi\epsilon_0 cR \quad \text{ב.}$$

$$4\pi\epsilon_0 cR \quad \text{ג.}$$

$$\sigma(r=1) = -2 \cdot 10^{-4} \frac{c}{m^2}, \quad \rho(r) = \begin{cases} 2 \cdot 10^{-4} \left(\frac{c}{m} \right) & r < 1 \\ 0 & 1 < r \end{cases} \quad (3)$$

המבנה הוא כדור ברדיוס 1 מטר המלא בצפיפות המטען נפחית ועטוף במעטפת בעלת צפיפות המטען המשטחית.

משוואת פואסון ולפלס:

סיכום כללי:

$$\vec{\nabla}^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} : \text{משוואת פואסון}$$

$$\vec{\nabla}^2 \varphi = 0 : \text{משוואת לפלס}$$

הלפלאסיאן של פונקציה סקלרית f כתלות בקואורדינטות קרטזיות:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

גליליות:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

כדוריות:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$

כאשר φ היא הזווית עם ציר z לפעמים מסמנים את הלפלאסיאן גם ב- Δf .

שאלות:

(1) דוגמה – שתי קליפות

- נתונות שתי קליפות כדוריות בעלות מרכז משותף ברדיוסים a ו- b ($a < b$). נתון כי הקליפה הפנימית מוארקת והחיצונית מוחזקת בפוטנציאל V .
- רשמו את משוואת לפלס לכל תחום.
 - פתרו את המשוואה, השתמשו בתנאי השפה ומצאו את הפוטנציאל בכל תחום.
 - מהי התפלגות המטען על הקליפה המוארקת?

תשובות:

$$\varphi(r) = \begin{cases} 0 & r < a \\ -\frac{abV}{r(b-a)} + \frac{bV}{b-a} & a < r < b \\ \frac{bV}{r} & b < r \end{cases} \quad \text{ב.} \quad \text{א.} \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = 0 \quad (1)$$

$$\sigma(a) = \frac{-\epsilon_0 bV}{a(b-a)} \quad \text{ג.}$$